19-11-18

- x_0 σ.σ. του A όταν $\forall \delta>0, \exists x\in A$, τ.ω. $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$
- x_0 αριστερό σ.σ. του A όταν $\forall \delta>0 \ \exists x\in A$, τ.ω. $x \in (x_0-\delta, x_0) \to$ αριστερή περιοχή του x_0
- x_0 δεξιό σ.σ. του A όταν $\forall \delta>0 \ \exists x\in A$, τ.ω. $x \in (x_0, x_0+\delta) \to$ δεξιά περιοχή του x_0

$\to \lim\limits_{x\to \xi^-} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, τ.ω. $\forall x\in (x_0-\delta, x_0)$,

$|f(x)-\ell| < \varepsilon$

$\to \lim\limits_{x\to \xi^+} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, τ.ω. $\forall x\in (x_0, x_0+\delta)$,

$|f(x)-\ell| < \varepsilon$

<u>Πρόταση</u>

$\lim\limits_{x\to \xi} f(x) = \ell \xrightarrow[\text{Άμεσο}]{\text{αυν}} \lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = \ell = \lim\limits_{x\to\xi^+} f(x)$

"$\Leftarrow$" $\lim\limits_{x\to\xi^-} f(x) = \ell \iff \exists \delta_1>0, \forall x\in(\xi-\delta_1, \xi), |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\xi^+} f(x) = \ell \iff \exists \delta_2>0, \forall x\in(\xi, \xi+\delta_2), |f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\forall x\in(\xi-\delta, \xi)\cup(\xi, \xi+\delta), |f(x)-\ell|<\varepsilon$, όπου

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

π.χ. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{|x^2-1|}{x-1} = -2$

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{|x^2-1|}{x-1} = +2$

$\frac{|x^2-1|}{x-1} = \frac{|x-1||x+1|}{x-1} = \begin{cases} |x+1|, & x-1>0 \\ -|x+1|, & x-1<0 \end{cases}$

Έστω $\varepsilon>0$. Αναζητώ $\delta>0$ τω $\forall x \in (1-\delta, 1)$,
$|-|x+1|-(-2)|<\varepsilon$

Όταν $x>-1 \Rightarrow |x+1| = x+1 \Rightarrow |-|x+1|-(-2)| = |1-x| = 1-x < \delta$,
όταν $x<1$, παίρνω $\delta = \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x} \frac{|x^2-1|}{x-1} = -2$

Ομοίως, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$ Δεν υπάρχει

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon>0, \exists M>0$ τω $\forall x>M$,
$|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon>0, \exists M>0$ τω $\forall x<-M$,
$|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to \xi^{-(+)}} f(x) = \ell$ αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ αριστερή (δεξιά) περιοχή του ξ τω. για όλα τα x σε αυτήν την περιοχή να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$ αν $\forall \varepsilon>0$, $\exists$ περιοχή του $\pm\infty$ τω. για όλα τα x σε αυτήν την περιοχή να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$

Έστω $M\in\mathbb{R}$, $(M,+\infty)$: περιοχή του $+\infty$, $(-\infty, M)$ περιοχή του $-\infty$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$ αν $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$, τω

$\forall x > M, |f(x) - l| < \varepsilon$

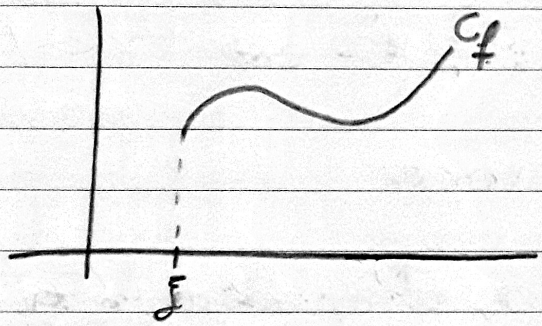
<u>Παράδειγμα</u>

$\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αναζητώ $M > 0$ ω.

$\forall x > M, \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon$, $\left|\frac{x+1}{x}\right| - 1 = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}, x > 0$

Αν πάρω $M = 1/\varepsilon \Rightarrow \forall x > 1/\varepsilon$

$\left|\frac{x+1}{x} - 1\right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$



Το $\lim_{x \to \xi^{-(+)}} f(x)$ έχει νόημα μόνο αν ξ είναι αριστερό (δεξιό) σ.σ. του Π.Ο. της $f(x)$

Το $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ έχει νόημα μόνο αν το Π.Ο. της $f(x)$ θα είναι φραγμένο από πάνω (κάτω) (ισοδύναμα το $\pm\infty$ είναι σ.σ. του Π.Ο. της f)

$\lim_{x \to \xi^{\pm}} f(x) = +\infty$, $\xi \in \mathbb{R}$: $\forall M > 0, \exists \delta > 0$ τω

$\forall x \in ((\xi - \delta, \xi + \delta) \setminus \{\xi\}) \cap D(f)$ ισχύει $f(x) > M$

$(\xi, \xi + \delta)$

$(\xi - \delta, \xi)$

Πρόταση

$\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$ αν $\lim_{x\to\xi^-} f(x) = \lim_{x\to\xi^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to\xi^{(\pm)}} f(x) = -\infty$, $\forall M>0$, $\exists \delta>0$ τω $\forall x \in ((\xi-\delta,\xi+\delta)\setminus\{\xi\}) \cap D(f)$
$(\xi,\xi+\delta)$
$(\xi-\delta,\xi)$

ισχύει $f(x) < -M$

• $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ Έστω $M>0$. Αναζητούμε $\delta>0$, τω. $\forall x \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ να ισχύει $\overbrace{f(x)}^{1/x^2}>M$. Δηλαδή $|x| < \sqrt{\frac{1}{M}}$, $\forall x \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\} \Leftrightarrow 0<|x|<\delta$

Για $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$: $\forall x \in (-\delta,\delta)\setminus\{0\}$, $f(x)>M$

• $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} \to$ Δεν υπάρχει

• $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ Έστω $M>0$. Αναζητούμε $\delta>0$ τω. $\forall x \in (3,3+\delta)$ να ισχύει $\frac{1}{x-3} > M \overset{x-3>0}{\Longleftrightarrow}$

$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$

$x-3 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow x < \frac{1}{M} + 3 = 3 + \frac{1}{M}$

Παίρνω $\delta = \frac{1}{M}$

$\lim_{x\to\xi^{(\pm)}} f(x) = \pm\infty$ αν $\forall M>0$ $\exists$ μια (δεξιά ή αριστερή) δακτυλική περιοχή του ξ τω. $\forall x$ σε αυτήν την περιοχή $f(x)>M$ ($f(x)<-M$)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0, \exists N > 0$ τω. $\forall x > N$,

$f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$: $\forall M > 0, \exists N > 0$ τω. $\forall x > N$,

$f(x) < -M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0, \exists N > 0$ τω $\forall x < -N$,

$f(x) > M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$: $\forall M > 0, \exists N > 0$ τω. $\forall x < -N$,

$f(x) < -M$

- $\lim_{x \to \infty} (-\sqrt{x}) = -\infty$

Έστω $M > 0$. Αναζητούμε $N > 0$, τω $\forall x > N$, $-\sqrt{x} < -M$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} > M \Leftrightarrow x > M^2$

Άρα για $N = M^2$ (ή οποιοδήποτε μεγαλύτερο)

έχω $-\sqrt{x} < -M$

Πρόταση

Έστω ότι $\lim_{x \to \xi} f(x)$ ($\xi \in \bar{\mathbb{R}}$) τότε $\exists$ μια περιοχή του ξ τω. $f(x) > 0$ $\forall x$ σε αυτήν την περιοχή.

$\bar{\mathbb{R}}$ → επεκτεταμένο → $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$